
Approximationer och felkalkyl

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Numerisk Analys?

- "Studiet av avrundningsfel"
- "Studiet av siffermässiga metoder för att lösa matematiska problem" Bonniers lilla uppslagsbok
- "Studiet av algoritmer för den kontinuerliga matematikens problem" Lloyd N. Trefethen
- "Metoder för att organisera och analysera beräkningar"

2

Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Approximationer

- Val av modell
 - idealiseringar
- Fel i indata
 - mätvärden med begränsad noggrannhet
- Avrundningsfel (beräkningsfel)
 - ändlig aritmetik
- Trunkationsfel (beräkningsfel)
 - en oändlig process ersätts med en ändlig
- Presentationsfel

3

Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Exempel

Jordens yta beräknas med $A = 4\pi r^2$

Approximationer :

- modelleras som en sfär
- radiens värde är resultat av mätningar och tidigare beräkningar
- värdet för π är en oändlig process som måste trunkeras
- värden och resultat i beräkningarna avrundas

4

Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Grundbegrepp

- *Närmevärde*
 \bar{a} närmevärde till det exakta värdet a
- *Absolut fel* i \bar{a} : $\Delta a = \bar{a} - a$
- *Relativt fel* i \bar{a} : $\Delta a/a$, ($a \neq 0$)

$a = \sqrt{2}$, $\bar{a} = 1.414$
 $\Delta a = a - \bar{a} = -2.1356E-4$
 $|\Delta a| \leq 2.2E-4$
 $|\Delta a/a| \leq 2E-4$

5

Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Korrekta decimaler – signifikanta siffror

- om $|\Delta a| \leq 0.5 \cdot 10^{-t}$ sägs närmevärdet ha t korrekta decimaler
- alla siffror i positioner med enhet $\geq 10^{-t}$ sägs vara signifikanta
- Ekvivalenta uttryck :
 $a = 1.414$, $|\Delta a| \leq 0.22E-3$ 3 korrekta decimaler
 $a = 1.414 \pm 0.22E-3$ 4 signifikanta siffror
 $1.41378 \leq a \leq 1.41422$

6

Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Ett exempel

- Närmevärdena

$$x_1 = 10.123455 \pm 0.5 \cdot 10^{-6} \quad x_2 = 10.123789 \pm 0.5 \cdot 10^{-6}$$

6 korr. decimaler, 8 sign. siffror och ett relativt fel $< 10^{-7}$

$$y = x_1 - x_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm (\Delta x_1 + \Delta x_2) = -0.000334 \pm 10^{-6}$$

$\Delta y \leq 0.5 \cdot 10^{-5}$, 5 korrekta decimaler, 2 sign. siffror

$$\left| \frac{\Delta y}{y} \right| = \frac{10^{-6}}{0.000334} < 3 \cdot 10^{-3} = 0.3 \cdot 10^{-2}$$

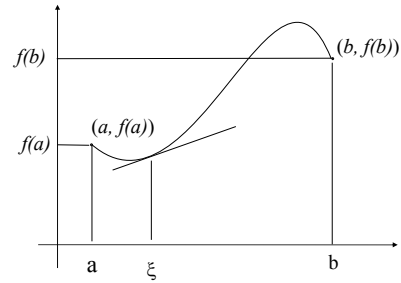
- Relativa felet ett mått på informationsmängden i närmevärdet

7

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Medelvärdessatsen geometriskt



8

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Differentialkalkylens mv-sats

Låt $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$

- f är kontinuerlig i $[a, b]$
- f är deriverbar i $]a, b[$

Då finns minst en punkt ξ i $]a, b[$ där tangenten till funktionskurvan är parallell med kordan mellan ändpunkterna.

Derivatan $f'(\xi)$ i punkten ξ uppfyller alltså

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ dvs } f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$$

9

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Fortplantning av fel

- Metoder för att analysera hur fel i indata fortplantas i beräkningar
- Differentialkalkylens medelvärdessats :

Om funktionen f är deriverbar så finns en punkt mellan a och b sådan att

$$\Delta f = f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

10

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

I praktiken

- Använd derivatan i närmevärdet \bar{x}

$$|\Delta f| \approx |f'(\bar{x})| \cdot \Delta x$$

- Exempel: $f(a) = \sqrt{a}$, då $a = 2.05 \pm 0.01$

$$\Delta f = f'(\xi) \cdot \Delta a = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \cdot \Delta a$$

$$|\Delta f| \approx \left| \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2.05}} \right| \cdot \Delta a = \frac{0.01}{2 \cdot \sqrt{2.05}} = 0.0036$$

$$\sqrt{2.05} \approx 1.43178210632764$$

11

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Felfortplantning i flera variabler

- Generalisering till flera variabler
- Allmänna felfortplantningsformeln

$$\Delta f \approx \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k$$

12

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Centrala begrepp för felanalys

Kondition:

- problemets förmåga att förstärka effekten av indatafel.

Stabilitet:

- algoritmens förmåga att förstärka effekten av beräkningsfel.

13

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Felanalys

Teoretisk:

- Baseras på begreppen kondition och/eller stabilitet i kombination med generella principer och matematik för ett allmänt problem och/eller algoritm

Ex.

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2}$$

14

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

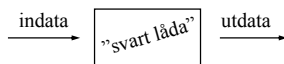
Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Felanalys

Experimentell:

- Baseras på begreppen kondition och/eller stabilitet i kombination med testkörningar för ett specifikt problem och/eller algoritm

Ex.



15

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Talrepresentation

- Flyttal lagras normaliserade i tre delar: tecken, mantissa och exponent

- .34265 · 10⁻²

Normaliserat

- mantissan m $.1 \leq m < 1$ (för basen 10)

16

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Flyttal

Klassiska referenser :

- Wilkinson - 1963, 1965)
- Flyttalsaritmetik & avrundningsfelsanalys

Standard

- Förslag till IEEE-standard 1981, 1984

Alg. för att evaluera av elementära funktioner i IEEE-aritmetik -89, -90, -91

Svårt att implementera korrekt & snabbt

- 1994 - fel i Intels Pentium chip (FPDIV) 4 sign.dec
- Windows 3.1 - $f(2.01 - 2.00) = 0.0$

17

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Rundningsregler

- avkorta
- avrundning till närmaste jämna
- Vancouver-exemplet
 - jan -82 börs-index satt till 1000.000
 - nov -83 bottennotering 524.881
 - korrekt värde skulle ha varit 1009.811
- index noterades med tre dec. och avhuggning

18

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Funktionsberäkningar

- matematikens elementära funktioner
- inte ovanligt med serieutvecklingar av de elementära funktionerna
 - approximerar seriens summa med en partialsumma
 - resttermen, trunckeringsfelet, måste uppskattas

19

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Taylorutveckling

- Vanligt att approximera funktioner kring en viss punkt a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots$$

20

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Taylorutveckling.....

- Gör substitutionen $h = x - a$ (avståndet till den punkt vi känner)

$$f(x) = f(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a) \cdot h^k}{k!} =$$

$$= f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a) \cdot h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(a) \cdot h^3}{3!} + \dots$$

21

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Approximation av oändliga serier

- Taylorutvecklingen oändlig
- Summan skattas med partialsumma
- Kvar blir trunckeringsfelet R_T
 - måste skattas - resttermsuppskattning

22

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Resttermsuppskattning

- Söker en övre gräns för den del av summan som inte tas med, $|R_T|$
- Låt $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vara en konvergent serie

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n, \quad R_T = S - S_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$$

23

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Kancellation

- Noggrannhetsförlust vid subtraktion
 - två nästan lika stora tal
- Gör en matematiskt ekvivalent omskrivning

24

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Omskrivningar

- Andragradsekvationer enkelt exempel
- Kvadratkomplettering

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = \frac{2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

- $\log b - \log a = \log \frac{b}{a}$
- Taylorutveckling, t.ex. för små värden på x

$$1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}$$

25

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedter Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Felet i approximationen :

h	Fel då N=4	Fel då N=6
-7.8540e-001	1.5532e-002	-3.2243e-004
-6.2832e-001	6.4091e-003	-8.4857e-005
-4.7124e-001	2.0396e-003	-1.5149e-005
-3.1416e-001	4.0454e-004	-1.3329e-006
-1.5708e-001	2.5346e-005	-2.0854e-008
0	0	0
1.5708e-001	2.5346e-005	-2.0854e-008
3.1416e-001	4.0454e-004	-1.3329e-006
4.7124e-001	2.0396e-003	-1.5149e-005
6.2832e-001	6.4091e-003	-8.4857e-005
7.8540e-001	1.5532e-002	-3.2243e-004

26

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedter Johansson
Department of Computing Science, Umeå University